



TITLE:

L-collineation群について(群論および代数的組合せ論)

AUTHOR(S):

平峰, 豊

CITATION:

平峰, 豊. L-collineation群について(群論および代数的組合せ論). 数理解析研究所講究録 1987, 630: 46-54

ISSUE DATE:

1987-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/100020>

RIGHT:

\mathcal{L} -collineation 群について.

大阪大学 教養部 平峰 豊

Ostrom-Wagner [7] によつて点上 2 重可移な自己同型群をもつ有限射影平面は デカルツ平面に限るが, affine 平面についてはこのことは成り立たない. すなわち, 非デカルツ affine 平面で, その自己同型群が点上 2 重可移なものが存在する.

$\pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ を affine 平面 (\mathcal{P} は点全体, \mathcal{L} は直線全体) とするとき affine 平面とその collineation の定義より次が言える.

命題 $\text{Aut } \pi \geq G$ とするとき次の (a) (b) は同値

(a) G は \mathcal{P} 上 2 重可移

(b) (i) $G(l)$ は l 上 2 重可移 ($\forall l \in \mathcal{L}$) かつ

(ii) G は \mathcal{L} 上可移

(ここで $G(l)$ は l を不変にする G の元全体のなす部分群)

条件 (b i) (b ii) については それをみたす affine 平面の研究が古くからある. [cf. 4, 11 章~16 章]

ここでは (b i) をみたす affine 平面についての結果をのべる.

以下では 考える集合はすべて有限集合とする.

次が基本的である。

定理 (Lüneburg 1973 [5], Johnson-Kallaher 1974 [2])

すべての line $\ell \in \mathcal{L}$ について $G(\ell)$ が ℓ 上
2重可移ならば π は translation plane であり, G
は translation group T を含む。

この定理により π はある vector space $V = V(2n, K)$
 $K = GF(q)$ 上定義された order q^n の translation plane
で, $G = TH$ とかける。ここで H は G の元で
zero vector を固定するもの全体からなる G の部分群
である。zero vector 0 を含む π の line は ちょうど
 $q^n + 1$ 個あり、すべて n 次元 K -subspace であり、
この全体を \mathcal{S} で表わし、 π の spread と言う。 V の
 0 でない vector は 唯一つのある $W \in \mathcal{S}$ に属する。

先の条件 (bi) は 次のように言い換えることができる。

(*) $\forall W \in \mathcal{S}$ について $H(W)$ は $W^* = W - \{0\}$ 上
transitive に作用する。 (一般には faithful ではない)

定義 translation plane π の collineation group

$H (\leq (\text{Aut } \pi)_0)$ が (*) をみたすとき

\mathcal{L} -collineation 群 と言う。 (一般に $(\text{Aut } \pi)_0 \leq \text{PL}(2n, K)$
が知られている [6])

L -coll. 群をもつ 知られた affine 平面 を 次に 書く.

(I) generalized Andre plane:

$V = \{(x, y) \mid x, y \in F = GF(q^n)\}$ を $K = GF(q)$ 上の $2n$ 次元 vector space とする. θ を

$$F^\times \longrightarrow \mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \quad \text{なる ある 写像 とし}$$

F での 和 $(+)$ は 通常のもつとし F の 乗法 を

$$x \circ y = x^{q^{\theta(y)}} \cdot y \quad (\cdot \text{ は } F \text{ での 積}) \quad y \neq 0$$

$$x \circ 0 = 0 \quad \text{に よつて 定義 する.}$$

このとき " $x=0$ " や " $y=x \circ m$ " ($m \in F$) は

V の n 次元 K -subspaces と 定まる か.

$$x^{q^{\theta(m_1)} - q^{\theta(m_2)}} \neq m_1^{-1} m_2 \quad \forall m_1, m_2 \in F^\times$$

なら $\mathcal{S} = \{ "x=0" \} \cup \{ "y=x \circ m" : m \in F \}$

は spread と なる こと が 容易に 分かる. \mathcal{S} により 定まる translation plane を generalized Andre plane と いう.

(II) rank 3 の 自己同型群をもつ semifield plane:

$D = D(+, \cdot)$ が semifield とは D が $+$ に関して abelian gp で \cdot に関して 単位元をもつ loop で $\{+, \cdot\}$ に関して 左右の分配律をみたす こと を 言う. このとき D を 用いて $V = \{(x, y) \mid x, y \in D\}$, $\mathcal{S} = \{ "x=0" \} \cup \{ "y=x \cdot m" \mid m \in D \}$ により 得られる 平面 を semifield plane と 言うか. この 自己同型群

が V 上 rank 3 の群として作用するのが II の場合である。

(III) order 27 の Hering plane [1]:

自己同型群の中に $SL(2, 13) (\leq GL(6, 3))$ を含み 点 上 2 重
可移 に作用する

(IV) order p^2 ($p \in \{11, 19, 29, 59\}$) の $R * p$ -plane:

自己同型群の中に $SL(2, 5) \times SL(2, 5)$ を含み $p=11$ のとき
1 個, $p=19$ のとき 3 個, $p=29$ のとき 9 個, $p=59$ のとき 1 個
合計 14 種類ある。 ([6] §18)

(V) order p^2 ($p \in \{5, 7, 11, 23\}$) の $F * p$ -plane:

自己同型群の中に $SL(2, 3) \times SL(2, 3)$ を含み. $p=5, 23$
のとき 1 個, $p=7$ のとき 2 個, $p=11$ のとき 4 個, 合計 8 種類
ある。 ([6] §19)

上の (I) と (II) が \mathcal{L} -coll. 群をもつ平面として標準的な
もので (III) (IV) (V) が 例外的なものと考えられる。 n が
奇数の時は実際にそうであることが Kallaher-Ostrom [3]
によって得られている。

定理 ([3]) π が $V(2n, q)$ 上定義された translation plane で、 n が奇数かつ \mathcal{L} -coll. 群をもつのは (I), (II) 又は (IV) のいずれかのものに同型である。

n が偶数の時は (I), (II) の一部と (IV), (V) の全部がこの例を与えてゐる。(IV), (V) は $n=2$ の場合である。

以下 $\pi = \pi(\mathcal{O}, \mathcal{L})$ を $V(2n, q)$ ($q = p^m$, $p = \text{素数}$) 上定義された \mathcal{L} -coll. 群 G をもつ translation plane で、その spread を \mathcal{S} とおく。

Zsigmondy の定理により (i) $p=2$, $mn=6$ 又は (ii) $mn=2$, $p+1=2$ の時を除けば $p^{mn}-1 (= q^n-1)$

は prime p -primitive divisor をもつ。これを u とおく。

仮定より $W \in \mathcal{S}$ に対して $G(W)$ は $GF(p)$ -vector space とみて W 上の transitive linear group (一般に faithful でない)

であり従って $q^n-1 = p^{mn}-1 \mid |G(W)|$ が成り立つ。

特に $G(W)$ や G の u -Sylow 群は trivial でない。

次の補題は \mathcal{L} -coll. 群をもつ平面を考える場合に基本的であり、その証明には gen. Andre planes の特徴付け ([6] Theorem 11.5 参照) を用いる。

補題 u を $p^{mn}-1$ の (存在すると仮定して) prime p -primitive divisor とし, R を G の Sylow u -群 とする。このとき $R \neq 1$ である。さらに $G \supset R$ ならば (i) π は デザルグ平面 又は (ii) R は noncyclic で π は generalized Andre plane である。

一般には $G \leq \Gamma L(2n, q)$ であるが, $L = G \cap GL(2n, q)$ とおく。 V が L -可約 のとき 次のことが成り立つ。

補題 L が ある K -submodule W ($0 \subsetneq W \subsetneq V$) を 不変にすれば $W \in \mathcal{S}$ である。

(証明) U を $U_1 := U \cap W \neq 0$ とする \mathcal{S} の元の一つとする。
 $G(U) \supset L(U)$ かつ U_1 は $L(U)$ -不変。さらに $G(U)/L(U) \simeq G(U)L/L \leq G/L \leq \mathbb{Z}_{2mn}$ 。これと \mathcal{L} -coll. 群の定義より $G(U)$ が $U^\# (= U - \{0\})$ 上 可移だから。

U_2 ($0 \subsetneq U_2 \subset U_1$) を $L(U)$ -不変な minimal な submodule として 選んでおけば $r = \dim_K U_2$ に対して

$(q^n - 1)/(q^r - 1) \mid 2mn$ である。これが 可能となるのは $r = n$ の場合だけで, $U \subseteq W$ であることが分かる。 $U \neq W$ なら 別の U' ($U \neq U'$, $U' \cap W \neq 0$) に対して 同様に $U' \subseteq W$ となり

$U \cap U' = 0$, $\dim U = \dim U' = n$ 故 $W = V$ となり矛盾を得る。つまり $W = U \in \mathcal{S}$ 。

命題 L が可解で V に可約に作用すれば、次のいずれかが起る。

(i) π は generalized Andre plane

(ii) $n=3$ かつ $K = GF(4)$

(iii) $n=2$

(証明) (ii), (iii) でないとし (i) を導く。 W を補題のようにとる。
 G - L の元 x で $Wx \neq W$ となるものがあるとして $W' = Wx$ とおく。
 $W' \in \mathcal{S}$ かつ W' は L -不変であることは明らか。

Zsigmondy より 一つの prime p -primitive divisor of $p^{n^n}-1$ u ととり R を G の u -Sylow 群としておけば、 $R \leq L$ である。
 Huppert の可解可移線型群の分類定理を用いて

$$G(W)/G_W, G(W')/G_{W'} \leq PL(1, q^n)$$

故に $[R, R] \leq L_W \cap L_{W'} = 1$ 。さらに R^W は $(L_{W'} L_W)^W$ と normalize するので $R \leq L_{W'} L_W$ 又は $[R, L_{W'}] \leq L_W$ 従って $L \triangleright R$ となり 先の補題を用いて π は generalized Andre plane となる。次に $WG = W$ のときは $G_W = 1$ なら $G \triangleright R$ となるので $G_W \neq 1$ としてよいから、

W' を GW の coaxial とすれば W' は G -不変である。
従って前半と同様の方法が適用できて、再び π は
gen. Andree plane となることが分かる。

一般の偶数 n については完全に決定することはむづかしい
問題であるが、 $n=2$ のときは G が既約に作用する G が
決定できることから 次の補題と定理を証明することが
できる。

補題 $n=2$ かつ L が非可解で、 V に既約に作用
すれば π は ある $R \times p$ -平面に同型である。

定理 $n=2$ のとき 次のいずれかが起る。

- (1) $\pi \simeq \text{gen. Andree plane}$
- (2) $\pi \simeq \text{rank } 3 \text{ の coll. 群をもつ semifield plane}$
- (3) $q \leq 59$. (先の例で (IV), (V) 型はすべてこの場合に相当する.)

(3) については全部を決定はしていないが、 $R \times p$ -平面,
 $F \times p$ -平面の他に多少の新しいものが入っていても
いい。

参考文献

1. C. Hering : Eine nicht-desarguessche zweifach transitive affine Ebene der Ordnung 27, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 34 (1964) 203-208.
2. N.L. Johnson-M.J. Kallagher: Transitive collineation groups on affine planes, Math. Z. 135 (1974), 149-164
3. M.J. Kallagher and T. G. Ostrom: Collineation groups irreducible on the components of a translation plane, Geom. Dedicata 9 (1980), 153-194
4. M.J. Kallagher: Affine Planes with Transitive Collineation Groups, North Holland, 1982.
5. H. Lüneburg : Affine Ebenen, in denen der Stabilisator jeder Geraden zweifach transitive ist. Arch. Math. 24. (1973), 663-668
6. H. Lüneburg : Translation Planes, Springer-Verlag, 1980
7. T.G. Ostrom-A. Wagner: On projective and affine planes with transitive collineation groups, Math. Z. (1959) 71, 186-199.